УДК 530.145

А. И. Иванов, А. А. Иванов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В ДИНАМИКЕ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Показано, что уравнение Линдблада для измеряемой квантовой системы в конечномерном гильбертовом пространстве можно записать в виде уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве большей размерности. Это уравнение можно рассматривать как уравнение эволюции объединенной системы, состоящей из двух подсистем: измеряемой и вспомогательной. Такое уравнение допускает решения в виде перепутанных состояний.

The article shows that the Lindblad Master Equation for finite-dimensional Hilbert space can be presented as a Schrödinger Equation on a Hilbert space of greater dimension. This equation can be considered as an equation of the evolution of an integrated system consisting of two subsystems: observational and auxiliary ones. This equation allows solutions in the form of entangled states.

Ключевые слова: уравнение Линдблада, эффективный гамильтониан, открытая квантовая система.

Keywords: the Lindblad Master Equation, effective Hamiltonian, open quantum system.

Введение

В случае открытой квантовой системы в рамках техники проекционных операторов Накаджима — Цванцига, можно получить уравнение эволюции — управляющее уравнение (master equation)

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \int_0^t \hat{K}_{t,S}[\hat{\rho}(t)]ds ,$$

где $\rho = Tr(\hat{\chi})$ — статистический оператор рассматриваемой системы; $\hat{\chi}$ — оператор плотности объединенной системы (рассматриваемая система и ее окружение). След берется по независимым переменным, характеризующим окружение; $\hat{H}$ — гамильтониан рассматриваемой системы (без взаимодействия с окружением), $\hat{K}_{t,S}$ — ядро интегрального оператора (определяет описываемую “память” системы — эволюцию до момента t).

Для большинства приложений достаточно хорошим приближением является приближение Борна — Маркова, согласно которому ядро интегрального оператора представлено в виде

$$\hat{K}_{t,S}[\hat{\rho}(t)] \approx K\delta(t-s)\hat{\rho}(s) .$$

В этом случае не учитывается предыдущая история эволюции системы, а динамика такой системы называется марковской. В данном приближении уравнение эволюции может быть записано в виде локального во времени уравнения:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \hat{\lambda}_t \left[\hat{\rho}(t)\right],$$

где $\hat{\lambda}_t$ — линейное отображение, являющееся эрмитовым, бесследовым.

Линдблад [1] показал, что управляющее уравнение может быть приведено к виду:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{1}{2}\sum_i (\hat{\Gamma}_i^+ \hat{\Gamma}_i \hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\Gamma}_i^+ \hat{\Gamma}_i - 2\hat{\Gamma}_i \hat{\rho} \hat{\Gamma}_i^+) . \qquad (1)$$

Рассмотрим двухуровневый атом с двумя различными состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$, облучаемый электромагнитным полем на резонансной частоте. Удобно описать этот атом в терминах трех операторов Паули:

$$\hat{\sigma}_1 = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|,\ \hat{\sigma}_2 = i(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|),\ \hat{\sigma}_3 = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|.$$

Для двухуровневого атома, облучаемого электромагнитным полем, эти операторы отвечают вещественной и мнимой частям диполя и разности населенностей уровней соответственно.

В представлении взаимодействия гамильтониан, описывающий резонансное взаимодействие с полем (которое считаем классическим), имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_1,$$

где Ω — частота Раби.

Положим далее, что двухуровневый атом в электромагнитном поле подвергнут серии мгновенных нежестких измерений, имеющих целью детектировать состояние атома.

Такие нежесткие измерения могут быть описаны в рамках подхода, который называется операторной мерой вероятности (Probability Operator Measure — POM)[2]. В рамках этого подхода вводятся операторы $\hat{\pi}_i$, являющиеся эрмитовыми положительно определенными и удовлетворяющими условию

$$\Sigma_i \hat{\pi}_i = \hat{1}$$

Каждый элемент $\hat{\pi}_i$ соответствует исходу измерения и представляет собой вероятность этого исхода, который может быть получен при измерении. В рассматриваемом случае *i*=1,2 и POM-элементы выберем в виде

$$\hat{\pi}_1 = \rho|2\rangle\langle 2| + (1-\rho)|1\rangle\langle 1|,\ \hat{\pi}_2 = \rho|1\rangle\langle 1| + (1-\rho)|2\rangle\langle 2|$$

в соответствии с измерениями, детектирующими атом в состоянии 1 или 2 соответственно. Здесь 0<p<1/2 — вероятность ошибочного детектирования состояния атома. Если p=0, то измерение считается идеальным, для p=1/2 измерение не дает никакой информации о системе.

Для того чтобы записать управляющее уравнение, введем эффективные операторы. Они не определяются однозначно элементами POM, но для простоты выберем их в виде:

$$\hat{A}_1 = \sqrt{\rho}\,|2\rangle\langle 2| + \sqrt{(1-\rho)}\,|1\rangle\langle 1| = A_1^+,$$
$$\hat{A}_2 = \sqrt{\rho}\,|1\rangle\langle 1| + \sqrt{(1-\rho)}\,|2\rangle\langle 2| = A_2^+.$$

Полагая теперь $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1\sqrt{R}$ и $\hat{\Gamma}_2 = \hat{A}_2\sqrt{R}$, где R — частота, с которой проводятся измерения, и подставляя их в уравнение (1), получим:

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right] + R\left(\hat{A}_1\hat{\rho}\hat{A}_1^+ + \hat{A}_2\hat{\rho}\hat{A}_{2i}^+ - \rho\right) = \frac{i\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_1,\hat{\rho}\right] + \gamma(\hat{\sigma}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3 - \hat{\rho})\,. \qquad (2)$$

Здесь $\gamma = \frac{R}{2}(\sqrt{(1-\rho)} - \sqrt{\rho})^2$ — эффективная частота, характеризующая частоту наблюдений и точность измерений. Уравнение (2) описывает измерение наблюдаемой величины $\hat{\sigma}_3$, которая имеет смысл разности заселенностей уровней.

Эффективный гамильтониан

Рассмотрим метод решения уравнения Линдблада (1), основанный на представлении статистического оператора в виде вектора n^2 — мерного гильбертова пространства, ассоциированного с данной системой. С этой целью заметим, что матрице $X = x_{ij} \in M(n;C)$ можно поставить в соответствие вектор $|X\rangle \in C^{n2}$ с компонентами, расположенными в следующем порядке:

$$X = \left(x_{ij}\right) \to |X\rangle = \left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, ..., x_{n1}, x_{n2}, x_{nn}\right)^T,$$

а матрице AXB можно поставить в соответствие вектор $|AXB\rangle$, компоненты которого выражаются через компоненты вектора $|X\rangle$ следующим образом:

$$AXB \to |AXB\rangle = \left(A \otimes B^T\right)X\rangle$$

Тогда уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{eff}|\psi\rangle$$

где эффективный гамильтониан (в общем случае неэрмитов) $\hat{H}_{eff}$ имеет вид:

$$H_{eff} = \left(\hat{H}\otimes\hat{1} - \hat{1}\otimes\hat{H}\right) + i\hbar\gamma\left(\hat{\sigma}_3\otimes\hat{\sigma}_3^T - \hat{1}\otimes\hat{1}^T\right), \qquad (3)$$

где

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем явное выражение для $\hat{H}_{eff}$ в матричном виде. Для этого введем новую систему векторов четырехмерного пространства состояний объединенной системы (атом + вспомогательная подсистема):

$$|I\rangle = |1\rangle \otimes |1'\rangle = |11'\rangle, |II\rangle = |1\rangle \otimes |2'\rangle = |12'\rangle,$$
$$|III\rangle = |2\rangle \otimes |1'\rangle = |21'\rangle, |IV\rangle = |2\rangle \otimes |2'\rangle = |22'\rangle,$$

где $|1\rangle, |2\rangle$ — ортонормированные вектора рассматриваемой системы (подсистемы А), $|1'\rangle, |2'\rangle$ — ортонормированные вектора вспомогательной системы (подсистемы В).

Вычисляя прямые произведения по формуле (3), для эффективного гамильтониана $\hat{H}_{eff}$ находим выражение:

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} & \frac{-\hbar\Omega}{2} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & -2i\hbar\gamma & 0 & \frac{-\hbar\Omega}{2} \\ \frac{-\hbar\Omega}{2} & 0 & -2i\hbar\gamma & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ 0 & \frac{-\hbar\Omega}{2} & \frac{\hbar\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в данном случае, гамильтониан объединенной системы $\hat{H}_{eff}$ является неэрмитовым.

Найдем его правые собственные вектора, определяемые из уравнения

$$\hat{H}_{eff} |\varphi_k\rangle = E_k |\varphi_k\rangle$$

Решение этого уравнения приводит к следующим результатам:

1. $E_1 = 0$.

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11'\rangle + |22'\rangle\right). \tag{4}$$

2. $E_2 = -i\hbar\gamma + \sqrt{\hbar^2\Omega^2 - \hbar^2\gamma^2}$;

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11'\rangle + \alpha|12'\rangle - |22'\rangle\right), \tag{5}$$

где $\alpha = \dfrac{\Omega}{i\gamma + \sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}}$.

3. $E_3 = -i\hbar\gamma - \sqrt{\hbar^2\Omega^2 - \hbar^2\gamma^2}$;

$$|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11'\rangle + \alpha^*|21'\rangle - |22'\rangle\right). \tag{6}$$

4. $E_3 = -2i\hbar\gamma$;

$$\left|\varphi_4\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|12^{'}\right\rangle + \left|21^{'}\right\rangle\right). \qquad (7)$$

Заметим, что состояния $\left|\varphi_1\right\rangle$, i=1,2,3,4, представленные формулами (4—7) являются перепутанными состояниями. Они представляют состояния объединенной системы (рассматриваемая система + вспомогательная система).

Перепутанные состояния

Оценим степень перепутанности состояний рассматриваемой и вспомогательной подсистем для состояния (4). Известно [3], что если состояние двухкомпонентной системы, состоящей из подсистем A и B, представимо в виде $\left|\varphi\right\rangle = \Sigma_{ij}\psi_{ij}\left|\alpha_i\right\rangle \otimes \left|\beta_j\right\rangle$, то редуцированные матрицы плотности могут быть представлены так: $\hat{\rho}_A = \psi^+\psi, \hat{\rho}_B = \psi^+\psi$, где матрица ψ образуется из элементов ψ_{ij}. Для состояния (4) эта матрица имеет вид:

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Тогда для рассматриваемой подсистемы $\hat{\rho}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

и для вспомогательной подсистемы $\hat{\rho}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

В этом случае энтропия перепутанности:

$$E(\varphi_1) = -\Sigma_i \lambda_i \log \lambda_i = -Tr(\rho_A \log \rho_A) = -Tr(\rho_B \log \rho_B),$$

где λ_i — собственные значения матриц ρ_A и ρ_B, определяемые из уравнений

$$\hat{\rho}_A\left|\chi_i\right\rangle = \lambda_i\left|\chi_i\right\rangle$$
$$\hat{\rho}_B\left|\chi_i\right\rangle = \lambda_i\left|\chi_i\right\rangle$$

Легко видеть, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, следовательно, $E(\varphi_1) = -\log_2 1/2 = 11$ (бит) — то есть в состоянии (4) обобщенной системы перепутывание максимально.

Заключение

Итак, мы показали, что уравнение Линдблада для квантовой системы, подверженной измерению, может быть записано в виде уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве большей размерности с неэрмитовым гамильтонианом. Полученное уравнение можно рассматривать как уравнение эволюции системы, состоящей из двух взаимодействующих подсистем: рассматриваемой и вспомогательной. Такое уравнение допускает решения в виде перепутанных состояний, широко использующихся в квантовой телепортации [4; 5], квантовой криптографии [6; 7], квантовых вычислениях. Квантовое перепутывание играет очень важную роль в квантовых информационных процессах, в которых проявляется неклассическая корреляция между квантовыми системами. В данной работе приведен пример использования перепутанных состояний в новой области — квантовой теории измерений.

Список литературы

1. *Lindblad G.* Communications Mathematical Physics. 1976. Vol. 48. P. 119.
2. *Helstrom C.W.* Quantum Detection and Estimation Theory. New York, Academic, 1976.
3. *Klyachko A*. Dynamic Symmetry Approach to Entaglement. URL: arxiv.org: quant-ph/0802.4008v1
4. *Bennett C.H., Brassard G., Crepeau C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 1895.
5. *Bouwmeester D., Pan J.-W.* // Nature. 1997. Vol. 390. P. 575—579.
6. *Ekert A.* // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67. P. 661.
7. *Bennett C.H., Brassard G., Mermin N.D.* // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 557.

Об авторах

А. И. Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта.

А. А. Иванов — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Ivanov — Prof., IKSUR.

A. Ivanov — student, IKSUR.